

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 - 3i$ și $z_2 = 1 - 2i$. Arătați că $z_1 + 3iz_2 = 10$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 3a + g(3)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 4) = \log_4 x + \log_4 5$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 4.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,8)$, $B(0,4)$ și $C(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că segmentele OA și BC au același mijloc.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $C = \frac{\pi}{6}$. Raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu 4. Arătați că $AB = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1-x & x-5 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(6)) = 10$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $A(3) \cdot A(3) = aI_2$.
- 5p** c) Demonstrați că numărul $N = \det(A(m) \cdot A(2) - A(m-1))$ este natural, pentru orice număr întreg m .
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 - 2X + 2$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(0) = 2$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $x_1 x_2 x_3 (1 + x_1 + x_2 + x_3) = 4$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X + 1$, determinați restul împărțirii lui f la polinomul $X^2 - 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 + x - 1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 + 3x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{3}$.
- 5p** c) Demonstrați că $e^{x+3}(x^2 + x - 1) \leq 5$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{2x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_3^5 (f(x) - \sqrt{2x^2 + 1}) dx = 8$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^2 \frac{x}{(f(x) - x)^2} dx = \frac{\ln 3}{4}$.

-
- | | |
|-----------|--|
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $g:[0,2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ în jurul axei Ox este egal cu $\frac{a\pi}{3}$. |
|-----------|--|

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_{șt-nat}*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z_1 + 3iz_2 = 4 - 3i + 3i(1 - 2i) = 4 - 3i + 3i - 6i^2 = 4 + 6 = 10$	2p 3p
2.	$g(3) = 7$, $f(a) = 3 - a$, pentru orice număr real a $3 - a = 3a + 7$, de unde obținem $a = -1$	2p 3p
3.	$\log_4(x^2 + 4) = \log_4(5x)$, de unde obținem $x^2 - 5x + 4 = 0$ $x = 1$ sau $x = 4$, care convin	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 3 numere care au produsul cifrelor egal cu 4, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	2p 3p
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului OA Cum M este mijlocul segmentului BC , obținem $a = 2$ și $b = 4$	2p 3p
6.	$BC = 2R = 8$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC $AB = \frac{BC}{2} = 4$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(6) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(6)) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-5) \cdot 1 = 5 + 5 = 10$	3p 2p
b)	$A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(3) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ $2I_2 = aI_2$, de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A(m) \cdot A(2) - A(m-1) = \begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ 1-m & m-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m-2 & 1 \\ 2-m & m-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m-5 \\ 4-m & 22-5m \end{pmatrix}$, de unde obținem $N = (m-4)(m-5)$, pentru orice număr întreg m Cum $m-4$ și $m-5$ sunt numere întregi și $(m-4)(m-5) \geq 0$, obținem că numărul N este natural, pentru orice număr întreg m	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 + a \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 = 0 + 0 - 0 + 2 = 2$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$x_1x_2x_3 = -2$, $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2x_3(1 + x_1 + x_2 + x_3) = -2(1-a)$, pentru orice număr real a $-2(1-a) = 4$, de unde obținem $a = 3$	3p 2p

c)	$f(-1) = 0$, de unde obținem $a = -3$	2p
	$f = X^3 - 3X^2 - 2X + 2 = (X^2 - 2)(X - 3) - 4$, deci restul împărțirii lui f la $X^2 - 2$ este -4	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(x^2 + x - 1) + e^x(2x + 1) =$	3p
	$= e^x(x^2 + x - 1 + 2x + 1) = e^x(x^2 + 3x), x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x^2 + x)}{e^x(x^2 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x+3)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x+3} = \frac{1}{3}$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 0$; pentru orice $x \in (-\infty, -3]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -3]$ și, pentru orice $x \in [-3, 0]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-3, 0]$	3p
	$f(x) \leq f(-3)$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$ și, cum $f(-3) = \frac{5}{e^3}$, obținem $e^{x+3}(x^2 + x - 1) \leq 5$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$	2p
2.a)	$\int_3^5 (f(x) - \sqrt{2x^2 + 1}) dx = \int_3^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _3^5 =$	3p
	$= \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$	2p
b)	$\int_1^2 \frac{x}{(f(x) - x)^2} dx = \int_1^2 \frac{x}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} dx = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 1) \Big _1^2 =$	3p
	$= \frac{\ln 9}{4} - \frac{\ln 3}{4} = \frac{\ln 3}{4}$	2p
c)	$V = \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_0^2 (3x^2 + 1 + 2x\sqrt{2x^2 + 1}) dx = \pi \left(x^3 \Big _0^2 + x \Big _0^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} \cdot (2x^2 + 1)' dx \right) =$	2p
	$= \pi \left(10 + \frac{(2x^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1}}{3} \Big _0^2 \right) = \frac{56\pi}{3}$, deci $\frac{a\pi}{3} = \frac{56\pi}{3}$, de unde obținem $a = 56$	3p

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_4 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_3 = 14$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 3$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $f(0) + (f \circ f)(0) = 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x - 4 \cdot 5^{x-2} = 105$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifre din mulțimea $A = \{1, 2, 3, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$ și $B(5,4)$ și dreapta d de ecuație $2x + ay = 0$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care mijlocul segmentului AB aparține dreptei d .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $BC = 12$ și $C = \frac{\pi}{6}$. Punctul M aparține segmentului AC astfel încât $3AM = AC$. Arătați că $BM = 4\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(a+b) - A(a) \cdot A(b) = abA(1)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați numerele reale a pentru care $2A(2a) - A(a) \cdot A(a) - A(1) \cdot A(2a-1) = 2A(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{6}(x-5)(y-5) + 5$, cu elementul neutru $e = 11$.
- 5p** a) Arătați că $7 \circ 8 = 6$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (6x-1) = 10$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n , $n \neq 5$, ale căror simetrice în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” sunt numere naturale pare.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + 4 \ln(x+3)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+3)}{x^2(x+3)}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \ln(x+3) - f(x)}{\ln x} = 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \geq 4 \ln \frac{x+3}{x^2+3}$, pentru orice $x \in (0, 1]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 f(x) e^x dx = 27$.

- | | |
|----|---|
| 5p | b) Arătați că $\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x+4} dx = -1$. |
| 5p | c) Se consideră funcția $g:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x^2)}{x^2}$. Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției g este concavă. |

Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2r = a_3 - a_1$, de unde obținem $r = 6$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_4 = a_3 + r$, deci $a_4 = 14 + 6 = 20$	3p 2p
2.	$f(0) = 3$, $(f \circ f)(0) = f(3) = 3a + 3$, pentru orice număr real a $3 + 3a + 3 = 0$, de unde obținem $a = -2$	3p 2p
3.	$5^{x-2} \cdot 21 = 105$, de unde obținem $5^{x-2} = 5$ $x - 2 = 1$, de unde obținem $x = 3$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei unităților și cifrei zecilor, cifra sutelor se poate alege în câte 2 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ numere	2p 3p
5.	$M(3, 2)$ este mijlocul segmentului AB $2 \cdot 3 + a \cdot 2 = 0$, de unde obținem $a = -3$	3p 2p
6.	$AB = 6$, $AC = 6\sqrt{3}$ $AM = 2\sqrt{3}$ și, cum $BM^2 = AM^2 + AB^2 = 48$, obținem $BM = 4\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$A(a+b) - A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ -a-b & 1-a-b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-ab & b+a-ab \\ -a-b+ab & -ab+1-a-b+ab \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} ab & ab \\ -ab & 0 \end{pmatrix} = abA(1)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(2a) - A(a) \cdot A(a) = a^2 A(1)$, $A(2a) - A(1) \cdot A(2a-1) = (2a-1)A(1)$, $2A(2a) - A(a) \cdot A(a) - A(1) \cdot A(2a-1) = (a^2 + 2a - 1)A(1)$, pentru orice număr real a $(a^2 + 2a - 1)A(1) = 2A(1)$, de unde obținem $a^2 + 2a - 1 = 2$, deci $a = -3$ sau $a = 1$	2p 3p
2.a)	$7 \circ 8 = \frac{1}{6}(7-5)(8-5) + 5 =$ $= 1 + 5 = 6$	3p 2p
b)	$x \circ (6x-1) = x^2 - 6x + 10$, pentru orice număr real x $x^2 - 6x + 10 = 10$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 6$	3p 2p
c)	$n \circ n' = n' \circ n = 11$, unde n' este simetricul lui n , de unde obținem $(n-5)(n'-5) = 36$ Cum n și n' sunt numere naturale, $n \neq 5$ și n' este număr par, obținem $n = 9$, $n = 17$ și $n = 41$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{4}{x+3} =$ $= \frac{4x^2 - x - 3}{x^2(x+3)} = \frac{(x-1)(4x+3)}{x^2(x+3)}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \ln(x+3) - f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x} + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(-\frac{1}{x} + 1\right)'}{(\ln x)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = 1$	3p
		2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ Cum $x \in (0, 1] \Rightarrow x \geq x^2$, rezultă că $f(x) \leq f(x^2)$, de unde obținem $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \geq 4 \ln \frac{x+3}{x^2+3}$, pentru orice $x \in (0, 1]$	2p
		3p
2.a)	$\int_0^3 f(x) e^x dx = \int_0^3 (x^2 + 4x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 18 = 27$	3p
		2p
b)	$\int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x+4} dx = \int_{-1}^0 x e^{-x} dx = \int_{-1}^0 x (-e^{-x})' dx = -x e^{-x} \Big _{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^{-x} dx =$ $= -e - 1 + e = -1$	3p
		2p
c)	$G'(x) = g(x) = (x^2 + 4) e^{-x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, deci $G''(x) = (x^2 + 4)' e^{-x^2} + (x^2 + 4) (e^{-x^2})' =$ $= 2x e^{-x^2} + (x^2 + 4) (-2x) e^{-x^2} = -2x (x^2 + 3) e^{-x^2} \leq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția G este concavă	3p
		2p